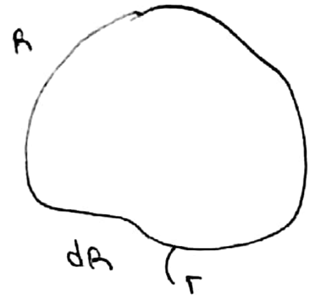
21/05/2018

Μαθημα 20ο
Κλασσική

## Η γενικευση σε πολλαπλα ολοκληρωματα

Εστω $R$ ενα κλειστο χωριο στο επιπεδο $xy$. Θεωρουμε συναρτησεις $u=u(x,y)\in C^2(R)$ (συνεχεις συν. με συνεχεις δευτερες παραγωγους στο $R$)



Ζητουμε τα ακροτατα του συναρτησοειδους
$$J=\iint_R L(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

Θεωρουμε και παλι το συνολο των συναρτησεων $u(x,y,a)=u(x,y,0)+a\,n(x,y)$, με $n(x,y)\in C^2(R)$ και $n(x,y)=0$ στο $\Gamma$

Δηλαδη $\begin{cases} u_x(x,y,a)=u_x(x,y,0)+a n_x \\ u_y(x,y,a)=u_y(x,y,0)+a n_y \end{cases}$

Δηλαδη $J=J|_{a=0}=\iint L(x,y,u(x,y,0)+an,\,u_x(x,y,0)+an_x,\,u_y(x,y,0)+an_y)\,dx\,dy$

Δηλαδη οι νεες "ανεξαρτητες" μεταβλητες ειναι $u,u_x,u_y$

Μεταβολη του $J$: $\frac{dJ}{da}=\delta J\Big|_{a=0}=\iint_R \frac{dL}{da}\,dx\,dy=$

$$=\iint_R\left(\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial u_x}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial u_y}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial a}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_R\left(n\frac{\partial L}{\partial u}+\boxed{n_x\frac{\partial L}{\partial u_x}}+\boxed{n_y\frac{\partial L}{\partial u_y}}\right)dx\,dy \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(n\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)=\boxed{n_x\frac{\partial L}{\partial u_x}}+n\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(n\frac{\partial L}{\partial u_y}\right)=\boxed{n_y\frac{\partial L}{\partial u_y}}+n\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial u_y}$$

αντικαθιστω στην (1)

Άρα $\delta J = \iint_R \left( \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \eta \, dx\,dy + \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_y}\right)\right] dx\,dy$

η συνάρτηση η στο σύνορο μηδενίζεται άρα θα πρέπει να μετατρέψω το διπλό ολοκλ. σ' ένα επικαμπύλιο αυτό θα γίνει μέσω του Θεωρ. Green

Μια ισότητα διαβάζεται και από τις δύο κατευθύνσεις (→) (←)

▸ **Θεώρημα Green**

Υπολογίζω εμβαδά από το σύνορο τους → Green

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\Gamma = \partial R} (P\,dx + Q\,dy)$$

Διπλό → Επικαμπύλιο

- $Q = x$, $P = 0$ : $\iint_R dx\,dy = \int_\Gamma x\,dy$
- $Q = 0$, $P = y$ : $\iint_R dx\,dy = -\int_\Gamma y\,dx$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} \iint_R dx\,dy = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx$$

αντιστοιχεί στο εμβαδόν του χώρου

Εδώ $Q = \eta \frac{\partial L}{\partial u_x}$, $P = -\eta \frac{\partial L}{\partial u_y}$, άρα προκύπτει

$$\iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_y}\right)\right] dx\,dy = \int_\Gamma \left( -\eta \frac{\partial L}{\partial u_y}\,dx + \eta \frac{\partial L}{\partial u_x}\,dy \right) = 0$$

καμπύλη → Γ

Με ανάλογο επιχείρημα από τη μία μεταβλητή έχω

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial u_y} = 0$$

αν δεν υπάρχει μία από τις δύο μεταβλητές x, y τότε έχω εξ. Euler

Σε 2 διαστάσεις δε μπορώ να κάνω παραγοντική ολοκλ. άρα πάω στο θεώρημα Green

## Παράδειγμα 1

$\boxed{\text{Ιούνιος 2016}}$

Αν $L = L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, $x \in C^4[a,b]$ τότε η Εξίσωση Euler είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0$$

*

**απάντηση**

$$J = \int_a^b L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt \qquad , \quad x = x(t,0) + a\,n(t)$$

Άρα $\displaystyle \frac{dL}{da} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{\partial \ddot{x}}{\partial a}$ οπότε $\dot{x} = \dot{x}(t,0) + a\dot{n}$

$\ddot{x} = \ddot{x}(t,0) + a\ddot{n}$

$$= n\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \ddot{n}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}$$

1 παραγοντική

2 παραγοντικές

Η μεταβολή λοιπόν θα είναι $\displaystyle \delta J = \frac{dJ}{da}\Big|_{a=0} = \int_a^b \left( n\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \ddot{n}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) dt$

θα χρειαστώ $n(a) = n(b) = 0$ και $\dot{n}(a) = \dot{n}(b) = 0$

* αυτά τα δύο μαζί με την 1 και 2 παραγοντικές μου έλυσαν το πρόβλημα

## Παράδειγμα 2

$\boxed{\text{Σεπτέμβριος 2016}}$

$$J[x] = \int L(t, x, \dot{x})\, dt$$

Θέλω να δείξω $\displaystyle \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

ολική παράγωγος

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $\displaystyle \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dL}{dt}} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Άρα $\displaystyle -\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{x}\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow -\dot{x}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

Παράδειγμα 3 (Θέμα - τροποποιημένο)

Να βρεθεί η καμπύλη που ελαχιστοποιεί το $S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

όπου η ζητούμενη καμπύλη είναι η $y=c_1\cosh(c_1x+c_2)$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

απάντηση

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial L}{\partial y'}=0 \quad (1)$$ , θεωρώ $L(y,y')=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2\pi\sqrt{1+(y')^2}\ , \quad \frac{\partial L}{\partial y'}=2\pi y\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}$$

Άρα η (1) θα γίνει

$$\boxed{\sqrt{1+(y')^2}-\frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}-\frac{\left[(y')^2+yy''\right]\sqrt{1+(y')^2}-yy'\frac{2y'y''}{2\sqrt{1+(y')^2}}}{1+(y')^2}=0$$

Σταματώ εδώ και κάνω αντικατάσταση τη y
για να βρω τη συνάρτηση του οποιουδήποτε είδους αυτό είχε
στο θέμα να βρεθεί

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$\cosh^2 x+\sinh^2 x=\cosh(2x)$

$2\sinh x\cosh x=\sinh(2x)$

...ooo Θυμάμαι

Διαφορά - Άθροισμα - Γινόμενο
Εδώ τα θυμάμαι

## Παράδειγμα 4

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\int_0^4 \int_0^2 (y-c)^2\, dy\, dx$

που περιγράφει ροπή αδράνειας χωρίου σταθερής επιφάνειας

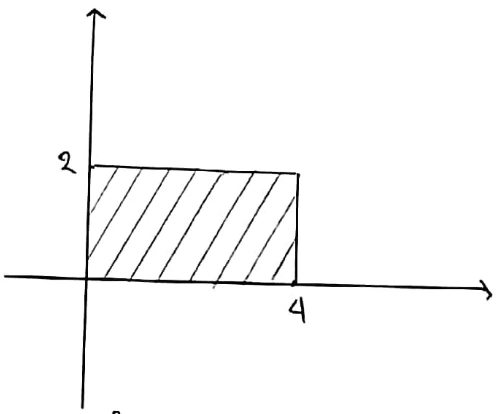
1) Περιγραφή χωρίου και εξήγηση σε τι αντιστοιχεί η σταθερά c

2) Να βρεθεί το c που ελαχιστοποιεί τη ροπή αδράνειας

απάντηση

Το χωρίο είναι τα όρια όλες τις πληροφορίες της λαμβάνω από εκεί (= χωρίο ολοκλήρωσης)

1) Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένα τετράγωνο και αυτό σημαίνει ότι το x δε "καταλαβαίνει" το y.




Το c αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής

$$\int_0^4 \int_0^2 (y-c)^2\, dy\, dx = 4\int_0^2 (y-c)^2\, dy = \frac{4}{3}(y-c)^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\left[(2-c)^3 + c^3\right]$$

2) Έχω ένα ολοκλήρωμα συναρτήσει του c

$$I(c) = \frac{4}{3}\left[(2-c)^3 + c^3\right]$$

Βρίσκω που ελαχιστοποιείται (δε χρησιμοποιώ Lagrange)

## Παραδειγμα 5 (Θεμα)

Θεωρω ενα πεδιο δυναμεων με σταθερες συνιστωσες $\vec{F} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}$
Να δειξετε οτι το εργο κατα μηκος μιας οποιασδηποτε διαδρομης απο το A στο B
ειναι $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$


## απαντηση

Το εργο ανεξαρτητο της διαδρομης, δηλ θελω να δειξω αρχικα οτι το $\vec{F}$ συντηρητικο πεδιο ... (το εδειξα, να ιπις να το διαβασεις)
Εξαρταται λοιπον απο την αρχικη και τελικη αφου εδειξα οτι ειναι συντηρητικο
Μπορει να γραφτει λοιπον

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \frac{dV}{d\vec{r}}\, dr = V(B) - V(A) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

(1Μ)

Την Τεταρτη τελευταιο μαθημα